

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ «МАТЕМАТИКА»

1. Цель и задачи вступительного испытания

Вступительное испытание в магистратуру направлено на выявление степени готовности абитуриентов к освоению магистерской программы «Математика». В ходе вступительных испытаний оцениваются знания и умения, выявляющие владение теоретическими основами математики, а также степень сформированности компетенций, значимых для успешного обучения в магистратуре по указанной программе.

2. Основные требования к уровню подготовки/знаниям, умениям и навыкам/компетентности поступающего

Абитуриент, поступающий в магистратуру, должен владеть компетенциями, значимыми для успешного обучения по выбранной программе:

1. Общекультурными: владеет культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; способен использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования; умеет логически верно, аргументировано и ясно строить письменную речь;

2. Профессиональными:

2.1 Общепрофессиональными: осознает социальную значимость своей будущей профессии, обладает мотивацией к выполнению профессиональной деятельности; владеет основами речевой профессиональной культуры;

2.2 В области педагогической деятельности: понимает место и роль математики в системе научного знания; понимает сущность аксиоматического метода как основного способа построения математических теорий; владеет основами фундаментальных математических теорий (алгебры, геометрии, математического анализа), понимает их взаимосвязь и специфику каждой из них; умеет применять основной аппарат фундаментальных и прикладных математических теорий к решению разнообразных теоретических и практических задач в области математики.

3. Форма вступительного испытания и его процедура

Вступительное испытание проводится в письменной форме по вариантам. Продолжительность экзамена — 90 минут.

По результатам вступительного испытания выставляется оценка по 100-балльной шкале. Оценка каждого задания проводится в соответствии с критериями (см. пункт Критерии оценки).

Объявление итогов экзамена происходит в соответствии с графиком оглашения результатов вступительных испытаний в магистратуру.

При проведении вступительного испытания применяются следующие контролирующие средства: задания практического характера, ориентированные на выявление умений и навыков решения математических задач в объеме программы бакалавриата по направлениям «Математика», «Современная математика», «Прикладная математика и информатика», «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»).

4. Содержание программы

Алгебра

Разложение целых чисел в произведение простых (основная теорема арифметики). Деление целых чисел с остатком. Сравнение целых чисел по модулю. Свойства сравнений. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Свойство последнего члена последовательности Евклида.

Определение системы вещественных чисел. Определение комплексных чисел. Действия с комплексными числами в нормальной и тригонометрической формах. Числовые поля. Минимальность поля рациональных чисел. Неприводимые полиномы над полем. Разложение полинома над полем на неприводимые множители. Неприводимые полиномы над полями комплексных, вещественных, рациональных чисел. Количество корней полинома.

Решение систем линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Определение линейного пространства. Примеры. Нулевой и противоположный элементы, их свойства. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства. Базис множества элементов линейного пространства. Ранг совокупности элементов. Ранг матрицы. Критерий разрешимости системы линейных уравнений.

Определение группы, кольца, поля, свойства. Примеры.

Геометрия

Векторы. Сложение, умножение вектора на число. Теоремы о разложении векторов. Скалярное произведение векторов. Определение и свойства.

Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Уравнения плоскости и прямой в пространстве.

Аксиоматический метод в геометрии. Аксиомы евклидовой планиметрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии. Система аксиом планиметрии Лобачевского. Ее непротиворечивость. Независимость аксиомы параллельности Евклида.

Движения плоскости (определение и общие свойства). Площадь многоугольной фигуры. Теорема единственности.

Топологическое пространство. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Примеры.

Определение геометрической кривой. Способы ее задания. Касательная. Длина кривой (определение и вычисление). Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Кручение кривой.

Математический анализ

Множества. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества. Несчетность множества действительных чисел.

Различные определения предела функции. Предел последовательности. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции. Теорема Больцано-Коши. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора).

Производная. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных, связь дифференцируемости с непрерывностью и существованием производной (частных производных). Техника дифференцирования. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталья. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью первой и второй производных.

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Конструкция интеграла Римана. Условия интегрируемости, основные классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Спряжляемые кривые. Квадрируемые фигуры.

Числовые ряды. Основные признаки сходимости положительных рядов. Абсолютная и

условная сходимость. Признак Лейбница. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций.

Элементарные функции комплексной переменной.

Дифференциальные уравнения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

5. Критерии оценки

Работы абитуриентов оцениваются по 100-балльной шкале.

Экзаменационная работа состоит из семи заданий. Абитуриент решает все задания. Работа состоит из трёх групп заданий (вопросов). Первая группа задач (вопросов) относится главным образом к алгебре, вторая – к геометрии, третья – к математическому анализу. В первой и второй группах – по два задания, в третьей – три. Каждое из первых шести заданий (вопросов) оценивается из 15 баллов, седьмое – из 10 баллов.

Критерии оценивания задания (вопроса), относящихся к первым шести заданиям:

- правильный ответ с полным объяснением – 14-15 баллов;
- ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 10-13 баллов;
- ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 5-9 баллов;
- неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1-4 балла;
- отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

Критерии оценивания седьмого задания (вопроса):

- правильный ответ с полным объяснением – 9-10 баллов;
- ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 8-9 баллов;
- ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 5-7 баллов;
- неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1-4 балла;
- отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

Минимальное количество баллов, необходимое абитуриенту для участия в конкурсе – 55.

6. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Атанасян Л. С, Базылев В. Т. Геометрия. Учебное пособие. В 2 частях. ч.1 2016 - М.: КНОРУС - 400 с.
2. Атанасян Л. С, Базылев В. Т. Геометрия. Учебное пособие. В 2 частях. ч.2 2020. - М.: КНОРУС - 544 с.
3. Будаев В.Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. СПб, Лань, 2012.
4. Будаев В.Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции нескольких переменных. СПб, Лань, 2017.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - Лань 2021.
6. Ляпин Е.С. Курс высшей алгебры. - Лань 2009.
7. Ляпин Е.С, Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. - М. Просвещение. Издания разных лет.
8. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - Лань 2020.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - СПб, 2021. - Т. 1-3.

Дополнительная литература

1. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С. А. Геометрия: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. - СПб., 1997. - Т. 1.
2. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С. А. Геометрия: учебное пособие для студентов

- физико-математических факультетов педагогических институтов. - СПб., 1997. - Т. 2.
3. Виленкин П.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969
 4. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях (элементы теории вероятностей в курсе средней школы) /Пер. с франц. - М., Просвещение, 1979
 5. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М: Едиториал УРСС, 2005.
 6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. Издания разных лет.
 7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. Издания разных лет.
 8. Ефимов П.В. Высшая геометрия: Учебное пособие для вузов. Издания разных лет.
 9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1-2. Издания разных лет.

Приложение

Пример варианта экзаменационных заданий

1. Найдите натуральные числа a и b , удовлетворяющие условиям

$$\text{НОД}(a, b) = 13 \quad \text{и} \quad \text{НОК}(a, b) = 1989.$$

2. Даны матрицы

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определены ли произведения матриц AB и BA ? Вычислите произведения, которые определены.

3. Напишите уравнения прямой, перпендикулярной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z}{5}$$

и

$$\frac{x}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

и проходящей через точку $(1;2;3)$.

4. Докажите, что сумма векторов, выходящих из центра правильного многоугольника к его вершинам равна нулю.
5. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции

$$f(x) = xe^x.$$

6. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' - y = 2.$$

7. Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{\cos^2(\ln x)}{x}.$$