С.Л. Вельмисова (Ульяновск)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В ЗАДАЧАХ С РАДИКАЛАМИ

В заданиях профильного экзамена по математике есть обязательная задача на нахождение экстремального значения функции. Некоторые из этих задач можно успешно решать без применения производной. К примеру, наличие радикалов в задании функции усложняет процесс дифференцирования и в этом случае лучше использовать геометрический подход. Допустим, нужно найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-10x+26}+\sqrt{x^2+8x+25}$. Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях $y=\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x+4)^2+9}$ и введем векторы $\vec{a}=(5-x;\,1)$ и $\vec{b}=(x+4;3)$.

Функцию y представим, как сумму длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Координаты суммы векторов $\vec{a}+\vec{b}=(9;\,4)$. Воспользуемся геометрическим неравенством $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$: $\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x+4)^2+9}$ = $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ = $\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$ – получили наименьшее значение функции. При нахождении аргумента для найденного значения функции учтем, что знак равенства достигается при $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т.е. $\frac{5-x}{x+4}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{11}{4}$ – используется свойство коллинеарности векторов. Функция двух переменных не изучается в средней школе, поэтому нахождение наименьшего значения функции $z=\sqrt{4x^2-4x+9y^2}+\sqrt{4x^2-12xy+18y^2}$ для школьников достаточно проблематично. Рассмотрим $z=\sqrt{(2x-1)^2+(3y-1)^2}+\sqrt{(2x-3y)^2+9y^2}$ как сумму длин векторов $\vec{a}=(1-2x;\,1-3y)$ и $\vec{b}=(2x-3y;3y)$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=(1-3y;\,1)$ и $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{1+(1-3y)^2}\ge 1$ и наименьшее значение заданной функции $z=1$.

Геометрические неравенства успешно применяются и в решении уравнений с радикалами. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$. Оценим левую часть с точки зрения геометрии: если задать вектор $\vec{a}=(1;1)$ и вектор $\vec{b}=(\sqrt{x-2};\sqrt{4-x})$, то получим скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ (α – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$), то $\vec{a}\cdot\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ = $\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{x-2+4-x}=2$. Оценка правой части очевидна : $(x-3)^2+2\ge 2$; приходим к системе уравнений $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2$; $x^2-6x+11=2$ и в итоге получаем в единственный корень уравнения $x=3$.

В уравнении $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$ радикалы в разных частях уравнения, связь между ними не просматривается. Представим левую часть, как скалярное произведение векторов $\vec{a}=(2;x)$ и $\vec{b}=(\sqrt{x-1};5)$. Тогда в правой части получаем произведение модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x+24}$. Итак, используем правило $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{x-1}+5x\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$. Равенство возможно при условии $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$: $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=5.$

Как видим, стандартные геометрические неравенства можно успешно использовать в решениях некоторых классов алгебраических задач.

Н. А. Зеленина, М. В. Крутихина (Киров)

ОБУЧЕНИЕ ПРИЕМАМ ОТБОРА КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест при развертывании линии уравнений и неравенств и, как показывает государственная итоговая аттестация, вызывают затруднения у большой части школьников.

В связи с вышесказанным нам представляются полезными задания, где при решении уравнения требуется сделать некоторый отбор его корней.

Приведем основные типы задач, направленные на обучение отбору корней в тригонометрических уравнениях.

1. Уравнения, в которых требуется отобрать корни, удовлетворяющие некоторому начальному условию.

1.1. Начальное условие формулируется в виде простейшего тригонометрического неравенства. Сначала условие накладывается на ту функцию, значение которой получается при решении простейшего тригонометрического уравнения, затем на любую другую тригонометрическую функцию, в том числе и сложную.

1.2. В качестве начального условия указывается промежуток, которому должны принадлежать корни, при этом их будет конечное число.

1.3. Начальным условием является указание выбрать наибольший отрицательный или наименьший положительный корень, корень, наиболее близкий к какому-нибудь числу, корни, принадлежащие области определения какой-либо функции, и т.п.

2. Уравнения, в которых не ставится явно задача отбора корней, но его приходится выполнять в процессе решения.

2.1. Отбор необходим, так как в уравнение входят тригонометрические функции $y = tgx, y = ctgx$.

2.2. На отбор влияет область определения не тригонометрических функций, которые входят в уравнение. Таковыми могут быть дробно-рациональная, корни четных степеней, логарифмическая и др.