и удобных сред для обучения математике в общеобразовательных организациях является среда GeoGebra.

Широко известны её возможности для работы с геометрическими фигурами на плоскости и в трехмерном пространстве, для построения графиков функций, создания сценариев с использованием кнопок. Значительно реже говорится об одном из режимов, в котором можно выполнять символьные вычисления. Это режим CAS (от англ. computer algebra system). Работая в этом режиме, можно выполнять вычисления, преобразование обыкновенной дроби в десятичную, упрощать символьные выражения, сокращать дроби, выполнять разложение числа на простые множители, переводить числа из одной системы счисления в другую, вычислять наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел, решать уравнения, выполнять подстановку в выражение значений переменных, строить графики, вычислять матрицы, программировать. Практически значимой является команда для копирования объектов строки, которая позволяет выбрать такие варианты, как «Скопировать как LaTex», «Копировать как формулу LibreOffice», «Копировать как изображение». Инструменты для работы в режиме CAS могут быть полезны как для организации деятельности обучающихся, так и преподавателю для разработки дидактических материалов к занятиям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ганичева Е.М. Формирование информационно-коммуникационной компетентности обучающихся в процессе обучения математике: монография / Е.М. Ганичева; М-во образ. и науки РФ, Волог. гос. ун-т. – Вологда: ВоГУ, 2015.

2. Тестов В.А. Образование в информационном обществе: переход к новой парадигме: монография / В.А. Тестов, О.Б. Голубев. – Вологда, 2016.

К.Р. Пиотровская, Н.В. Сазонова (С.-Петербург)

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Введение

В подготовке школьников к участию в олимпиадах по информатике традиционно используются следующие темы: перебор вариантов и методы его сокращения, динамическое программирование, сортировка и поиск, обработка последовательностей, комбинаторика, алгоритмы на графах, элементы вычислительной геометрии [1]. На наш взгляд, эту систематизацию необходимо дополнить, во-первых, темой «Анализ алгоритмов», а во-вторых, выделением целого круга задач междисциплинарного и многоцелевого характера. В работе [3], посвященной подробному анализу решения одного из типов подобных задач, они названы задачами двойного назначения, мы же, оценивая перспективу развития этой классификации, будем называть их междисциплинарными задачами, носящими многоцелевой характер, т.к. могут быть решены как с помощью реализации соответствующих алгоритмов, так и аналитически, т.е. чисто математическими средствами. Это свойство оказывается весьма полезным, так как позволяет комбинированно развивать и проверять знания участников олимпиад как в области программирования, так и в области математики, а также, иногда, и в области теоретической информатики. Покажем возможности использования задач указанного типа на примере алгоритма схождения целых чисел [2].

Анализ условия и решения междисциплинарных задач

Подробное изложение алгоритма схождения, который занимает базовую позицию в описываемом подходе приведено в работе [2].

На основе этого несложного алгоритма можно сформулировать ряд подзадач, которые естественно сгруппировать следующим образом:

1) задачи, для решения которых рекомендуется применение алгоритма схождения чисел и, следовательно, его реализация в виде программной процедуры;

2) задачи, которые предлагается решать совместно математическими и программными средствами;

3) задачи, поддающиеся решению только математическими средствами.

В качестве примера мы будем рассматривать три базовые задачи.

Задача №1. Даны J_0 и S. Найти все значения X_0, при которых I_0 и J_0 сходятся через S шагов (варианты: найти наименьшее, наибольшее значение X_0).

Задача №2. Даны S и X_0. Найти все значения J_0, при которых I_0 и J_0 сходятся через S шагов.

Задача №3. Даны J_0, S и X_0. Проверить, сходятся ли I_0 и J_0 через S шагов при заданном X_0 (вариант: найти число шагов, необходимых для схождения чисел).

Сформулированные задачи могут решаться выполнением алгоритма, причем для первых двух требуется перебор вариантов исходных данных.

Задача №1 решается перебором всех значений X_0 от S до $J_0 - 1$, и выполнением алгоритма для каждого значения с последующей проверкой сходимости через S шагов.

Решение задачи №2 требует перебора значений J_0 и выполнения алгоритма для каждого значения. Перебор должен начинаться со значения равного $X_0 + 1$. Для вычисления верхней границы перебора участник олимпиады (в дальнейшем испытуемый) должен учесть, что наибольшее возможное значение J_0 – это то, при котором оно уменьшится до $(1+J_0)/2$ через S шагов при условии, что из него будут последовательно вычитаться значения X_0, X_0-1, ..., X_0-S+1. Следовательно, имеем: $J_0 - (1+J_0)/2 \le SX_0 - S(S-1)/2$ или $J_0 - 1 \le 2X_0 S - S^2 + S$ или $J_0 \le S(2X_0 - S + 1) + 1$.

Программа, реализующая решение задачи №3, должна выполнить алгоритм до схождения чисел, после чего число шагов алгоритма сравнивается с заданным. Желательно вывести в файл или на печать пошаговые результаты работы алгоритма (значения I, J и X после каждого шага).

Теперь можно приступить к разработке формул, с помощью которых можно получить аналитические решения задач. Для представления формул в компактном виде уменьшим I_0 и J_0 на 1 (тогда $I_0 = 0$) и опустим индекс 0 переменной X. Значения I_n и J_n, полученные по окончании первого этапа, представляются формулами: $I_n = nX - (n-1)n/2$; $J_n = J_0 - nX + (n-1)n/2$

Рассмотрим 2 случая:

1) $J_n > I_n$: $J_n - I_n = J_0 - nX + (n-1)n/2 - (nX - (n-1)n/2) = J_0 - 2nX + (n-1)n = S - n$.

2) $I_n > J_n$: $I_n - J_n = -(J_n - I_n) = 2nX - J_0 - (n-1)n = S - n$.

Итак, имеем два равенства, которые лежат в основе аналитических методов:

$$J_0 - 2nX + (n-1)n = S - n \qquad (1)$$

$$2nX - J_0 - (n-1)n = S - n \qquad (2)$$

Рассмотрим методы решения сформулированных задач.

Для решения задачи №1 нужно представить равенства (1) и (2) как формулы для вычисления X:

$$2nX = J_0 - S + n^2, \quad X = (J_0 - S + n^2) / 2n$$

$$2nX = J_0 + S + n(n-2), \quad X = (J_0 + S + n(n-2))/2n.$$

Таким образом, имеем две формулы для вычисления n:

1) $n = X \pm \sqrt{X^2 - (J_0 - S)}$ 2) $n = X + 1 \pm \sqrt{(X+1)^2 - (J_0 + S)}$

Испытуемому не нужно вычислять сами значения n, а лишь проверить, является ли одно из этих значений целым. Для этого требуется, чтобы значение $X^2 - (J_0 - 1 - S) - 1$ либо $(X+1)^2 - (J_0 - 1 + S)$ оказалось квадратом целого, помня, что в формулах J_0 уменьшено на 1.

Анализ формулировки и решения междисциплинарных задач, допускающих только аналитическое решение

Рассмотрим следующие две задачи.

Задача №4. Вычислить число подходящих значений J_0 при заданных S и X_0, т.е. таких, при которых алгоритм заканчивает работу после выполнения S шагов. Для решения задачи испытуемый должен воспользоваться формулами для вычисления J_0, которые использованы для решения задачи №2. Как уже упоминалось, из формул видно, что число подходящих J_0 равно S.

Задача №5. Указать условия, при которых задача 1 имеет решения.

Здесь следует воспользоваться уравнениями, полученными при разборе задачи 1. Обозначив $M_1 = J_0 - S - 1$ для первого уравнения и $M_2 = J_0 + S - 1$ для второго (с учетом того, что в уравнениях J_0 уменьшено на 1) получим формулы: $X = M_1/2n + n/2$ и $X = M_2/2n + n/2 - 1$.

Теперь нужно найти, во-первых, условие, при котором возможно вычисление целых значений X, и, во-вторых, условие, при котором значения X будут удовлетворять неравенству $S \le X < J_0$.

Для формулировки первого условия нужно рассмотреть 2 случая:

a) S – четное. Как уже упоминалось, в этом случае n может принимать только четные значения. Значит, для того, чтобы $M_1/2n$ и $M_2/2n$ были целыми, M_1 и M_2 должны быть кратными четырем. Поскольку $M_2 = M_1+2S$, достаточно проверить на кратность только одно из этих значений.

b) S – нечетное. Тогда n принимает нечетные значения. При $n = 1$ имеем $X = (M_1+1)/2$ и $X = (M_2+1)/2 - 1$. Так как суммы M_1+1 и M_2+1 четные, X в обоих случаях принимает целые значения и, следовательно, при нечетном S можно вычислить по крайней мере по одному целому значению X по каждой формуле.

Вывод: при четных S целые значения X могут быть вычислены, если M_1 кратно 4, при нечетных S целые значения X могут быть вычислены всегда.

Далее следует проанализировать неравенство, определяющее второе условие. Займемся сначала его левой частью. Подставив вместо X значения из формул и выполнив несложные преобразования, получим
$M_1 \geq (2S - n)n$ и $M_2 \geq (2S - n + 1)n$ или $M_1/n \geq 2S - n$ и $M_2/n \geq 2S - n + 1$.

S может принимать четное или нечетное значения. Рассмотрим эти варианты:

a) S – четное, тогда минимальное значение $n = 2$. Имеем $M_1/2 \geq 2S - 2$ *и* $M_2/2 \geq 2S - 1$. Представим в последнем неравенстве M_2 через M_1: $(M_1 + 2S)/2 \geq 2S - 1$ или $M_1/2 \geq S - 1$. Отсюда следует, что достаточно проверить только последнее неравенство: $(J_0 - S - 1)/2 \geq S - 1$ или $J_0 \geq 3S - 1$.

b) S – нечетное. Минимальное значение $n = 1$. Рассмотрим второе неравенство: $M_2 \geq 2S$ или $J_0 + S - 1 \geq 2S$. Так как $J_0 > S$, неравенство выполняется при любых значениях.

Рассмотрим правую часть неравенства, определяющего второе условие:

$X = M_1/2n + n/2 < J_0$ и $X = M_2/2n + n/2 - 1 < J_0$. Наибольшего значения X достигает, когда вычисляется по второй формуле при $n = 1$ для нечетных значениях S и $n = 2$ при четных. Поэтому достаточно проверить второе неравенство при этих значениях:

a) $n = 1$. $\begin{array}{l}(J_0 + S - 1)/2 + 1/2 - 1 < J_0; \\ J_0 + S - 1 + 1 - 2 < 2J_0; S - 2 < 2J_0\end{array}$. Неравенство доказано.

b) $n = 2$. $\begin{array}{l}(J_0 + S - 1)/4 + 1 - 1 < J_0; \\ J_0 + S - 1 < 4J_0; S - 1 < 3J_0\end{array}$. Неравенство доказано.

В результате проведенного анализа получили решение задачи №5: задача №1 всегда имеет решение при нечетном S и имеет решение при четном S, если значение $J_0 - S - 1$ кратно 4 и выполнено неравенство $J_0 \geq 3S - 1$.[1]

В заключение рассмотрим протоколы решений некоторых из сформулированных выше задач.

---

[1] Список частных задач можно было бы расширить, например, указав условия, при которых задача №1 имеет только одно решение; при заданном J_0 найти значение S, при котором задача №1 имеет наибольшее число решений и т.д.

Пример решения задачи №1 аналитическим методом.

Исходные данные: $J_0 = 273$, $S = 23$. Примем $n = 5$

Уравнения	$J_0 - 2nX + (n-1)n = S - n$ **(1)**	$2nX - J_0 - (n-1)n = S - n$ **(2)**
Расчёт	$X = (272 - 23 + 25)/10 = 27.4$.	$X = (272 + 23 + 15)/10 = 31$
Вывод	Так как полученное значение не целое число, то решение уравнения (1) не найдено	Получили целое число, что означает, что найдено решение уравнения: ($n = 5$, $X = 31$), а $X = 31$ является одним из значений, удовлетворяющих условию задачи

Пример решения задачи №3 выполнением алгоритма схождения чисел[2].

Пошаговые результаты работы алгоритма для соответствующих исходных данных приведены ниже.

Исходные данные: *I= 1, J= 273*, число шагов в задании: 23.

Проверяем *X= 31*.

Номер шага	Вариант	Значения переменных		
		I	*J*	*X*
1	1	32	242	30
2	1	62	212	29
3	1	91	283	28
4	1	119	285	27
5	**1**	**146**	**128**	**26**
6	2	120	154	25
7	1	145	129	24
8	2	121	153	23
9	1	144	130	22
10	2	122	152	21
11	1	143	131	20
12	2	123	151	19
13	1	142	132	18
14	2	124	150	17
15	1	141	133	16
16	2	125	149	15
17	1	140	134	14
18	2	126	148	13
19	1	139	135	12
20	2	127	147	11
21	1	138	136	10
22	2	128	146	9
23	1	137	137	8

Алгоритм выполнил не более чем 31 шаг.

Вариант шага №1 выполняется при *I<J: I:= I+X, J:= J-X, X:= X-1*.

Вариант шага №2 выполняется при *I>J: I:= I-X, J:= J+X, X:= X-1*.

[2] Выполнена программа, решающая задачу №3, шаг №5 является последним на первом этапе работы алгоритма схождения и выделен жирным шрифтом.

Поскольку после 23-го шага I=J= 137, то полученное значение X удовлетворяет условию задачи.

Пример решения задачи №5.

Условие	Решение	Вывод
$J_0 = 31$, $S = 10$.	$J_0 - S - 1 = 20$. Получили число, кратное 4. $3S - 1 = 29$. Неравенство $J_0 \geq 3S - 1$ выполнено.	Задача №1 имеет решение.
$J_0 = 31$, $S = 12$.	$J_0 - S - 1 = 18$. Получили число, не кратное 4.	Задача №1 не имеет решения
$J_0 = 31$, $S = 14$.	$J_0 - S - 1 = 16$. Получили число, кратное 4. $3S - 1 = 41$. Неравенство $J_0 \geq 3S - 1$ не выполнено.	Задача №1 не имеет решения

Выводы

Рассмотрение приведенных выше примеров позволило продемонстрировать возможности использования междисциплинарных задач при подготовке к олимпиадам как по информатике, так и по математике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирюхин В.М., Окулов С.М. Методика решения задач по информатике// Международные олимпиады. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний – 2007.
2. Открытая олимпиада школьников «Информационные технологии» – 2017 – info.olimpiada.ru/activity/4357
3. Братчиков И.Л., Сазонова Н.В. Об использовании задач двойного назначения в олимпиадах по информатике //Компьютерные инструменты в образовании. 2011. № 6. С. 26-32.