мощью данной программы можно решить не только главную задачу, но и следующие подзадачи:

– проверка введенного выражения на правильность записи;

– построение табличного представления функции в двух- и трёхзначной логиках;

– построение двойственной функции в двухзначной логике;

– построение двойственной функции в трехзначной логике;

– проверка корректности вводимых значений.

Программа работает для конечнозначных функций, которые могут зависеть от любого числа переменных ($n \geq 1$). Однако, при $n \geq 5$ (для двухзначной логики) и при $n \geq 3$ (для трехзначной логики) табличное представление функции не строится ввиду большого объема информации. При этом, с главной задачей (т.е. определением самодвойственности данной функции) программа справляется на отлично и при большом количестве переменных.

Для программы есть следующие функциональные ограничения:

– можно получить только три вида представления конечнозначных функций: векторный, табличный и аналитический;

– при большом числе переменных данной функции время получения результата может увеличиться (зависит также от самой вычислительной машины).

Программная реализация исследования на самодвойственность конечнозначных функций способствует внедрению информационных технологий в обучение дискретной математике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михеева Е.А., Табакова Е.Д. Исследование конечнозначных функций на самодвойственность: сб. научных работ, представленных на Международную научную конференцию «70 Герценовские чтения» / под ред. В.В. Орлова. – СПб.: изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. – С.81-82.

Л.Ю. Белова, Ю.А. Белов (Ярославль)

ВЫЧЕТЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Цель данного материала в узком смысле – обсудить, как лучше подходить к определению комплексных чисел. «Лучше» для кого – имеются в виду вузы с обширной математической подготовкой, для выпускников которых математика является одним из основных рабочих инструментов, это математики, информатики, криптографы и другие. В более широком смысле: вопрос о том, насколько рано и как рассматривать вычеты, кольца и группы вычетов (фактор-группы, фактор-кольца).

Действительно, во всех указанных вузах поле комплексных чисел определяется и изучается уже в первом семестре, было время, комплексные числа изучались и в школе. При этом в большинстве случаев комплексные числа определяются как пары действительных чисел; на множестве всевозможных пар соответственно задаются операции и устанавливаются свойства этих операций. Здесь всё просто, но нет хорошего ответа на важный вопрос – почему так определены операции, а можно ли было сделать как-то по-другому – короче, это несколько искусственный путь, который только в дальнейшем обретает «плоть и кровь». Мы не убеждённые сторонники какого-то другого подхода, просто мы предлагаем сравнить и подумать. Предположим, что мы сказали так: поле комплексных чисел есть кольцо (оно окажется полем) классов вычетов многочленов с действительными коэффициентами по модулю многочлена $1+x^2$. Конечно, можно сказать – так ещё более непонятно; верно, но здесь поле возникает как результат каких-то стандартных, известных действий с многочленами, которые можно объяснить. Здесь предлагается складывать и перемножать многочлены как обычно, только «с точностью до многочленов, кратных данному». Думающий школьник может вспомнить, что подобные вещи уже производились с целыми числами, они были полезны и просто необходимы при решении арифметических задач.

Действительно, попробуем сравнить построение кольца вычетов Z_n и поля комплексных чисел. Во-первых, оба кольца являются евклидовыми (ради краткости мы используем термины, которые могут быть пояснены при необходимости), то есть в обоих кольцах имеются алгоритмы деления с остатком, очень похожие друг на друга. Кроме того, и многочлены и целые числа имеют естественную позиционную запись по степеням 10 или по степеням x. Эти соображения даже школьнику могут быть вполне понятны.

Кроме того, хотя в рамках основной программы школы понятие вычета по модулю n и не изучается, на семинарах, элективах и других дополнительных занятиях часть школьников, наиболее заинтересованных математикой, с этим понятием также знакомится. При этом часто школьники вполне понимают, что каждый класс вычетов имеет своего канонического представителя – остаток от деления любого данного числа из класса на n. Видимо, что-то школьники усваивают и на уроках информатики, где математические понятия вводятся «походя», и тем не менее… Тем более определение вычета становится понятнее студентам, когда уже определены такие понятия, как отношение эквивалентности и доказана теорема о разбиении множества на классы эквивалентных элементов, если на множестве задано некоторое отношение эквивалентности. Операции на классах эквивалентности также не являются совсем неожиданными, так как ещё в школе отмечается корректность определения операций на классах – достаточно вспомнить свойство: если a сравнимо с b, a c сравнимо с d, то a+c сравнимо с b+d. Конечно, в школе говорится более длинно: «если a и b имеют одинаковые остатки при делении на n, c и d также имеют одинаковые остатки при делении на n, тогда сумма a+c имеет такой же остаток при делении на n, что и b+d», но суть утверждения остаётся той же.

Теперь предлагается каждому многочлену от одного переменного x сопоставить его остаток от деления на многочлен $1+x^2$ – ситуация вполне аналогичная рассмотрению остатка от деления на n в кольце целых чисел. Аналогично тому, что каждое целое число имеет остаток 1, 2,…, n–1, каждый многочлен при делении на $1+x^2$ имеет остаток – какой-то многочлен степени не выше первой: a+bx, два многочлена называются сравнимыми по данному модулю $(1+x^2)$, если имеют одинаковые остатки при делении на выбранный многочлен. Они лежат в одном классе вычетов. Операции на классах многочленов снова определяются «по представителям»: для перемножения двух классов надо выбрать многочлен из одного класса, многочлен из другого класса, перемножить их и взять остаток от деления на модуль, то есть, в данном случае, на $1+x^2$. Снова справедливо замечание о корректности операций на классах многочленов.

Так же, как для чисел имеет место утверждение – если модуль является простым числом, по получающееся кольцо вычетов будет даже полем, так и для многочленов получаем утверждение: если модуль является неприводимым многочленом, то получающееся кольцо вычетов (фактор-кольцо) будет полем. Вот это поле и называется полем комплексных чисел. Отметим при этом, что «непонятное» определение умножения комплексных чисел получается вполне естественно: если один класс определяется остатком a+bx, а другой класс определяется остатком c+dx, то их произведением будет $(a+bx)(c+dx) \equiv (ac+(bc+ad)x+bdx^2)(\mathrm{mod}(1+x^2))=ac-bd+(bc+ad)x$, в согласии с определением произведения классов. Каждый класс получает, как отмечено ранее, канонический представитель – остаток при делении на модуль: a+bx.

Если какой-то класс имеет остаток a+0x=a, то такой класс «отождествляют» с действительным числом a; если сказать грамотно, имеется изоморфное вложение поля действительных чисел R во вновь построенное поле C, так как при этом отождествлении сохраняются действия над действительными числами и теми комплексными, которые им соответствуют. Далее. Число x принято обозначать i. По правилам действий с комплексными числами $i^2=-1$, другими словами, $x^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\ (1+x^2))$, или ещё по-другому: x^2 при делении на $1+x^2$ даёт в остатке –1.

После этих соглашений каждое комплексное число приобретает стандартный вид: a+bi.

Конечно, можно сказать, что это какие-то изыски, например, в книге [1] изложение в общем-то вполне традиционное, правда, там ещё предварительно рассматривается подход с использованием матриц. Мы не возражаем, хотя при данном подходе используются алгебраические соображения, которые пригодятся в дальнейшем. Но, конечно, их можно изложить и после, может быть, для кого-то наоборот, эти конструкции явятся исходным примером.

Последнее замечание: вполне аналогично можно было бы рассмотреть кольцо многочленов с рациональными коэффициентами, и его кольцо вычетов по модулю, например, многочлена $x^2–2$. Этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел и потому фактор-кольцо по данному модулю является полем, снова все элементы поля имеют каноническую запись $a+b\sqrt{2}$. Здесь a и b являются рациональными числами; данное поле используется при решении различных задач арифметики, точнее – теории алгебраических чисел. Имеется множество других примеров использования данных конструкций, вообще переход к фактор-системам есть основа многих алгебраических построений, поэтому их надо изучать возможно более глубоко и всесторонне.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

Е.А. Михеева, Д.И. Хисамутдинов (Ульяновск)

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРОГРАМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Одним из интересных примеров приложения булевых функций (БФ) является теория управляющих систем.

В данной работе рассматривается синтез схем из функциональных элементов (СФЭ).

Все необходимые обозначения, понятия и определения по БФ взяты из [1], соответственно, по СФЭ взяты из [2].

Основная задача синтеза: Найти такой метод синтеза схем, позволяющий для любой функции от n аргументов построить такую схему S, для которой её сложность $L(S)$ близко к функции Шеннона $L(n)$. Такой подход был предложен К.Э. Шенноном в 1949 году при рассмотрении контактных схем [3].

Не сложно догадаться, что оценка сложности СФЭ, реализующей БФ, зависит от вида представления самой БФ.

Алгоритм реализации БФ СФЭ в данной работе заключается в представлении БФ в виде СДНФ (совершенной дизъюнктивной нормальной формы) или СКНФ (совершенной конъюнктивной нормальной формы) в зависимости от наименьшего числа единичных или нулевых значений в табличном её представлении.

Программа, реализующая данный алгоритм, написана на языке высокого уровня C#, т.к. этот язык считается самым подходящим инструментом для реализации алгоритмов такого типа.

Программная реализация БФ СФЭ способствует внедрению информационных технологий в обучение дискретной математике.